Gonnord - Tosel
Calcul diff p. 64

Théorème du point fixe de Brouwer

<u>Théorème :</u> Toute application continue de la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ dans elle-même admet un point fixe.

<u>Démonstration :</u> On suppose par l'absurde qu'il existe $f : B^n \longrightarrow B^n$ continue sans point fixe.

* <u>On se ramène au cas f $\mathcal{C}^1$:</u> Comme B^n est compacte, on fixe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in B^n$, $\| f(x) - x \| > \varepsilon$. Par Stone-Weierstrass, on fixe $P : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dont les coordonnées sont polynomiales telle que $\| f - P \|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$.

Pour tout $x \in B^n$, on a $\| P(x) \| \leqslant \| P(x) - f(x) \| + \| f(x) \| < \frac{\varepsilon}{2} + 1$.

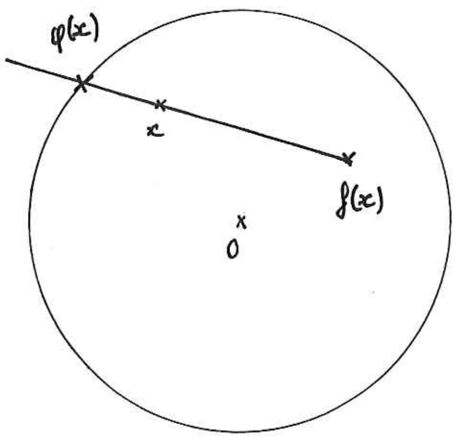
On pose $Q = \dfrac{1}{1 + \frac{\varepsilon}{2}} P$, qui est $\mathcal{C}^1$ et vérifie $Q(B^n) \subset B^n$.

Pour tout $x \in B^n$, on a
$$\begin{aligned} \| Q(x) - f(x) \| &\leqslant \| Q(x) - P(x) \| + \| P(x) - f(x) \| \\ &\leqslant \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon}{2}} \right) \| P(x) \| + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leqslant \varepsilon \end{aligned}$$

donc $\| Q(x) - x \| \geqslant \| f(x) - x \| - \| Q(x) - f(x) \| > 0$, et Q n'a pas de point fixe.

<u>Quitte à remplacer f par Q, on peut donc supposer f $\mathcal{C}^1$.</u>

* On veut montrer qu'il existe $\varphi : B^n \longrightarrow S^{n-1}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\varphi_{|S^{n-1}} = id_{S^{n-1}}$.



Pour tout $x \in B^n$, on note $\varphi(x)$ le point d'intersection de $[f(x), x)$ et de S^{n-1}.

On a $\varphi(x) = f(x) + \lambda(x) (x - f(x))$ avec $\lambda(x) \geqslant 0$,

donc $\| f(x) + \lambda(x) (x - f(x)) \|^2 = 1$, ce qui donne $\|f(x)\|^2 + 2\lambda(x)\langle f(x), x - f(x)\rangle + \lambda(x)^2\|x - f(x)\|^2 = 1$,

donc $$\lambda(x) = \frac{-\langle f(x), x - f(x)\rangle + \sqrt{\Delta(x)}}{\|x - f(x)\|^2},$$

avec $\Delta(x) = \langle f(x), x - f(x)\rangle^2 + \|x - f(x)\|^2(1 - \|f(x)\|^2) > 0$.

Alors φ est $\mathcal{C}^1$ sur B^m, car λ est $\mathcal{C}^1$ sur B^m. On a de plus $\varphi_{|S^{m-1}} = id_{S^{m-1}}$ par construction.

* Pour tout $t \in [0,1]$, on pose $\varphi_t : \begin{array}{ccc} B^m & \longrightarrow & B^m \\ x & \longmapsto & (1-t)x + t\varphi(x) \end{array}$,

et $P(t) = \int_{\mathring{B}^m} \det J_{\varphi_t}(x)\, d\lambda(x)$, qui est polynomiale en t.

* Pour tout $x \in B^m$, on a $\|\varphi(x)\|^2 = 1$, donc $\langle \varphi(x), d\varphi_x(h)\rangle = 0$ pour tout $h \in \mathbb{R}^m$. Donc $\mathrm{Im}\, d\varphi_x \subset \varphi(x)^\perp$, donc $d\varphi_x$ n'est pas inversible, ce qui donne $\det J_\varphi(x) = 0$. Donc $P(1) = 0$.

* On va montrer que φ_t est injective pour t assez petit.

Soient $t \in [0,1[$ et $x, y \in B^m$ tels que $\varphi_t(x) = \varphi_t(y)$.
On a $(1-t)\|x - y\| = t\|\varphi(x) - \varphi(y)\|$. Comme φ est $\mathcal{C}^1$, le théorème des accroissements finis donne $\|\varphi(x) - \varphi(y)\| \leq M\|x - y\|$, où $M = \sup_{z \in B^m} |||d\varphi_z||| < +\infty$.

On a alors $\|x - y\| \leq \frac{Mt}{1-t}\|x - y\|$, d'où $x = y$ si $t < \frac{1}{1+M} =: \alpha$.

Donc φ_t est injective pour $t < \alpha$.

* Pour tout $t < \alpha$ et tout $x \in S^{m-1}$, on a $\varphi_t(x) = x$,

donc $\varphi_t(\mathring{B}^m) \subset \mathring{B}^m$ par injectivité de φ_t.

* Pour tous $t < \alpha$ et $x \in B^n$, on a $\det J_{\varphi_t}(x) = a_n(x)\,t^n + \dots + a_1(x)t + 1$,

où les a_i sont continus sur B^n. On pose $m = \sup_{\substack{x \in B^n \\ t \in [0,1]}} |a_n(x)\,t^{n-1} + \dots + a_1(x)|$.

Pour $t < \beta := \min\left(\alpha, \frac{1}{m}\right)$, on a $|a_n(x)t^n + \dots + a_1(x)\,t| < 1$, donc $\det J_{\varphi_t}(x) > 0$.

Par inversion globale, φ_t est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathring{B}^n$ sur l'ouvert $\varphi_t(\mathring{B}^n)$ pour $t < \beta$, tel que $\det J_{\varphi_t}(x) > 0$ sur $\mathring{B}^n$.

* On va montrer que $\varphi_t(\mathring{B}^n) = \mathring{B}^n$. On sait déjà, par le point ci-dessus, que $\varphi_t(\mathring{B}^n)$ est un ouvert de $\mathring{B}^n$. Soit à présent (y_k) une suite d'éléments de $\varphi_t(\mathring{B}^n)$, avec $y_k \longrightarrow y \in \mathring{B}^n$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on écrit $y_k = \varphi_t(x_k)$, avec $x_k \in \mathring{B}^n$. Par compacité de B^n, on fixe une extraction σ telle que $x_{\sigma(k)} \longrightarrow x \in B^n$.
Par continuité, on a $y = \varphi_t(x)$. Si $t < \beta$, on a $x \notin S^{n-1}$ par injectivité de φ_t, donc $x \in \mathring{B}^n$, ce qui donne $\varphi_t(\mathring{B}^n)$ fermé, donc $\varphi_t(\mathring{B}^n) = \mathring{B}^n$ par connexité.

* Pour $t < \beta$, on a
$$\begin{aligned}
P(t) &= \int_{\mathring{B}^n} \det J_{\varphi_t}(x)\, d\lambda(x) \\
&= \int_{\mathring{B}^n} |\det J_{\varphi_t}(x)|\, d\lambda(x) && \text{car alors } \det J_{\varphi_t}(x) > 0 \\
&= \int_{\mathring{B}^n} d\lambda(x) && \text{par changement de variables} \\
&= \lambda(\mathring{B}^n)
\end{aligned}$$

donc P est constant, en tant que polynôme constant sur un intervalle non vide, égal à $\lambda(\mathring{B}^n)$, ce qui est absurde, car $P(1) = 0$.